

4. SERIES DE TAYLOR. LÍMITES INDETERMINADOS

4.1. POLINOMIOS DE TAYLOR

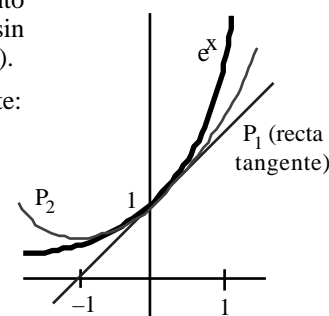
Se trata de encontrar el polinomio que mejor aproxime una función cerca de un punto y de estimar el error cometido al sustituir la función por el polinomio (así podremos, sin calculadora, hallar $\log 2$ o $\sin 1$, por ejemplo, y calcular muchos límites indeterminados).

Sea $f(x)=e^x$. El polinomio de grado 1 más parecido a f cerca de 0 es la recta tangente:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

Observemos que satisface $P_1(0) = f(0)$; $P_1'(0) = f'(0)$. Probablemente se parecerá más a la exponencial el polinomio P_2 de grado 2 que satisfaga $P_2(0) = f(0)$; $P_2'(0) = f'(0)$; $P_2''(0) = f''(0)$, es decir,

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



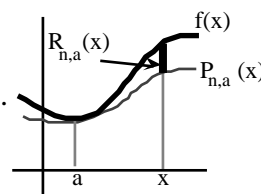
Es de esperar que un polinomio de grado n que sea una buena aproximación a una función f cerca de un punto a sea el que coincida con f y con sus n primeras derivadas en a . Se prueba fácil que:

Si f tiene n derivadas en a el único polinomio de grado n que cumple $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k=0, \dots, n$ es

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)[x-a] + \frac{f''(a)}{2!}[x-a]^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}[x-a]^n$$

Al $P_{n,a}(x)$ se le llama **polinomio de Taylor** de f de grado n en el punto a .

Llamaremos $R_{n,a}(x)$, **resto del polinomio de Taylor**, al error cometido para cada x al sustituir $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$, es decir, $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$



(si f es un polinomio de grado n se puede ver que coincide con su polinomio de Taylor de grado n : el $R_n=0$)

Es esperable que el resto sea pequeño si x está cerca de a y que disminuya al ir aumentando n .

Para deducir la siguiente estimación para el resto utilizaremos el llamado teorema del valor medio de Cauchy:

Sean f y g continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) $c \in (a,b)$ tal que $[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$

(se demuestra aplicando Rolle a $h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$)

Teor
(forma de
Lagrange
del resto)

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$ (ó en $[x,a]$) entonces

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} [x-a]^{n+1} \text{ para algún } c \in (a,x) \text{ si } x>a \text{ [ó } c \in (x,a) \text{ si } x<a]$$

[otras expresiones del resto son útiles, pero se necesitan las integrales]

Para cada $t \in (a,x)$ tenemos que $f(x) = f(t) + f'(t)[x-t] + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} [x-t]^n + R_{n,t}(x)$.

Miremos este resto como una función de t para x dado y llamémosle $S(t)=R_{n,t}(x)$. Derivando con respecto a t :

$$0 = f'(t) + (-f'(t) + f''(t)[x-t]) + (-f''(t)[x-t] + \frac{f'''(t)}{2!} [x-t]^2) + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} [x-t]^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} [x-t]^n \right) + S'(t)$$

Por tanto $S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} [x-t]^n$. Aplicando el TVM de Cauchy en $[a,x]$ a $S(t)$ y $g(t)=[x-t]^{n+1}$ tenemos que

$$\text{existe algún } c \in (a,x) \text{ tal que } \frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{S'(c)}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \frac{[x-t]^n}{[x-t]^{n+1}} \frac{1}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Como $S(x)=R_{n,x}(x)=0$, $S(a)=R_{n,a}(x)$, $g(x)=0$, $g(a)=[x-a]^{n+1}$ se tiene el resultado. [Igual si $x<a$]

Normalmente calcularemos los polinomios de Taylor para $a=0$. En ese caso no escribiremos la a en la notación del polinomio y el resto y las expresiones anteriores adoptan la forma (fórmula de McLaurin):

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[0,x]$ (ó $[x,0]$) entonces para algún $c \in (0,x)$ [ó $c \in (x,0)$]

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Calculando las derivadas se obtienen los siguientes polinomios de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad \text{con} \quad R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + [-1]^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \quad \text{con} \quad R_{2n+1}(x) = \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + [-1]^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) \quad \text{con} \quad R_{2n}(x) = \frac{\operatorname{cos}^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

El $\log x$ no está ni definido en $x=0$. Por eso lo que se desarrolla es el $\log(1+x)$.

La derivada n -ésima de esta función es $[-1]^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$ y por tanto

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + [-1]^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \quad \text{con} \quad R_n(x) = \frac{[-1]^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

En los tres primeros casos se tiene que $|f^{(n+1)}(c)| \leq K$ para cualquier n (tanto si x es $>$ como $<$ 0). En particular $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ para $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$; para el \log no existe tal cota independiente de n . Por tanto, $|R_n(x)| \leq \frac{K|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ y como vimos al estudiar las series $\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ cualquiera que sea x .

Así pues, el error $R_n(x) \rightarrow 0$ x . Por tanto, podemos aproximar el valor de e^x , $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ con la precisión que queramos utilizando un polinomio de Taylor con n suficientemente grande (habrá que tomar un n mayor cuanto más lejano de 0 esté el x). Se puede probar además (no con la expresión dada del resto) que los polinomios del $\log(1+x)$ sólo aproximan a la función si $-1 < x \leq 1$.

Ejemplos: Calculemos con error menor que 10^{-4} el $\operatorname{sen} 1$.

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad |R_{2n+1}(1)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{10000} \quad \text{si} \quad 2n+2 \geq 8$$

Por tanto, $\operatorname{sen} 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = 0.8415$ con error $|R_7(1)| \leq \frac{1}{8!} < 10^{-4}$

Si aproximamos $\operatorname{sen} 2$ con este mismo polinomio de grado 7 el error será mayor:

$$\operatorname{sen} 2 \approx 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} - \frac{128}{5040} = 0.9079 \quad ; \quad |R_7(2)| \leq \frac{2^8}{8!} = \frac{2}{315} \approx 0.0063$$

[Como $P_7(x) \approx P_8(x)$, los errores son de hecho menores:

$$|R_8(1)| \leq \frac{1}{9!} < 0.000003 \quad ; \quad |R_8(2)| \leq \frac{2^9}{9!} < 0.0015 \quad (\text{cotas muy fáciles si conociésemos ya las series de Taylor}).$$

Hallemos ahora $\log \frac{5}{4}$ con error $< 10^{-3}$. Como $|R_n(\frac{1}{4})| = \frac{1}{(n+1)4^{n+1}(1+c)^{n+1}} \quad 0 < c < 1/4 \quad \frac{1}{(n+1)4^{n+1}} < \frac{1}{1000}$

si $n \geq 3$ debemos usar el polinomio de grado 3: $\log \frac{5}{4} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} = 0.224$ con error $< 10^{-3}$.

$$\text{De otra forma: } \log \frac{5}{4} = -\log \frac{4}{5} = -\log \frac{1}{5/4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{50} + \frac{1}{375} = 0.223 \quad \text{con} \quad |R_3(-\frac{1}{5})| \leq \frac{1}{4 \cdot 5^4 (1+c)^4} < \frac{1}{444} < \frac{1}{1000}$$

A partir de los cuatro polinomios de Taylor vistos podemos con sencillas manipulaciones dar los de otras muchas funciones relacionadas con las anteriores, basándonos en el siguiente resultado:

Teor $f(x) = P(x) + x^n g(x)$ con $g(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$ $P(x)$ es el polinomio de Taylor P_n de orden n de f .

[es fácil comprobar que coinciden tanto f y P como sus n primeras derivadas en $x=0$]

Por ejemplo, para escribir el polinomio de $\operatorname{sen}[3x^2]$ basta cambiar x por $[3x^2]$ en el polinomio del $\operatorname{sen} x$:

$$P_{4n+2}(x) = 3x^2 - \frac{3^3 x^6}{3!} + \dots + [-1]^n \frac{3^{2n+1} x^{4n+2}}{(2n+1)!} \quad (\text{puesto que } \operatorname{sen}[3x^2] = P_{4n+2}(x) + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} 3^{2n+2} x^{2 \cdot 4n+2})$$

Análogamente se comprueba que el de orden n de $x^2 e^{-2x}$ es: $P_n(x) = x^2 - 2x^3 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^5}{3!} + \dots + [-1]^n \frac{2^n x^{2n}}{(n-2)!}$
(cambiando x por $-2x$ y multiplicando el polinomio resultante por x^2)

[Otra serie de polinomios importantes se verán en series de Taylor y en los problemas].

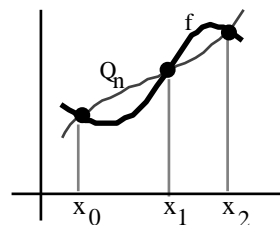
Polinomios de interpolación.

El polinomio de Taylor P_n es sólo una de las formas de aproximar una f con un polinomio. El P_n es, como vimos, el que mejor aproxima a f cerca de un punto. Pero muchas veces interesa encontrar un polinomio Q_n que aproxime a f en todo un intervalo. Una de las posibilidades de hacerlo es conseguir un Q_n que tome los mismos valores que f en una serie de puntos del intervalo. A éste polinomio se llama polinomio de interpolación. Otra situación en que es útil el polinomio de interpolación es cuando sólo disponemos de unos cuantos valores de la f (por ejemplo, esto sucederá cuando la f sea resultado de unas cuantas medidas experimentales). Es decir:

Dada una función $f(x)$ se llama polinomio de interpolación de grado n para los $n+1$ puntos distintos x_0, \dots, x_n al polinomio Q_n que satisface

$$Q_n(x_0)=f(x_0), \dots, Q_n(x_n)=f(x_n)$$

Un Q_n arbitrario tiene $n+1$ coeficientes a_0, \dots, a_n . Se podrían determinar con las $n+1$ ecuaciones lineales $Q_n(x_k)=f(x_k)$, $k=0 \dots n$, pero veremos formas mucho más cortas de calcular el Q_n . Es fácil ver que Q_n es único: si hubiese otro Q_n^* , la diferencia $Q_n - Q_n^*$ sería un polinomio de grado n con $n+1$ raíces distintas, lo que es imposible.



Hay varias formas de construir el Q_n . Veamos la fórmula de Newton. Ponemos Q_n en la forma:

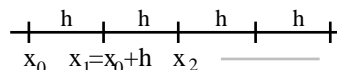
$$Q_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Sustituyendo ahora sucesivamente $x=x_0, x=x_1, \dots, x=x_n$, obtenemos el sencillo sistema

$$A_0=f(x_0), A_0+A_1(x_1-x_0)=f(x_1), \dots, A_0+A_1(x_n-x_0)+\dots+A_n(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})=f(x_n)$$

que permite ir calculando los A_k de forma sucesiva y, por tanto, el polinomio de interpolación.

En el caso particular (y muy común) de que los x_k sean equidistantes (es decir, $x_{k+1}=x_k+h$) el sistema adopta la forma más simple:



$$A_0=f(x_0), A_0+hA_1=f(x_1), A_0+2hA_1+2!h^2A_2=f(x_2), \dots, A_0+nhA_1+\dots+\frac{n!}{(n-k)!}h^kA_k+\dots+n!h^nA_n=f(x_n)$$

$$A_0=f(x_0), A_1=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)], A_2=\frac{1}{2!h^2}[f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)], A_3=\frac{1}{3!h^3}[f(x_3)-3f(x_2)+3f(x_1)-f(x_0)], \dots$$

Otra expresión del Q_n la da la fórmula de Lagrange. Llamemos

$$k(x) = (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

Observemos que el polinomio [de grado n] $k(x)/k(x_k)$ vale 1 si $x=x_k$ y vale 0 si $x=x_j$, con $j \neq k$. Por tanto:

$$Q_n(x) = f(x_0)\frac{0(x)}{0(x_0)} + \dots + f(x_k)\frac{k(x)}{k(x_k)} + \dots + f(x_n)\frac{n(x)}{n(x_n)}$$

[parece más cómodo disponer de esta fórmula que resolver el sistema de antes, pero su inconveniente principal es que si queremos añadir un nuevo punto tenemos que volver a calcular todos los k , lo que no sucedía con Newton]

Como en los polinomios de Taylor, aquí también se puede dar una estimación del error cometido al sustituir la f por su polinomio de interpolación Q_n . Admitimos sin demostración que si f es de $C^{n+1}[x_0, x_n]$ se tiene que:

$$f(x)-Q_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) f^{(n+1)}(c) \text{ con } c \in (x_0, x_n)$$

Ejemplo. Hallemos el polinomio de grado 2 que toma los mismos valores que $f(x) = \sin x$ en $0, \pi/2$ y π .

Sabemos que $f(x_0)=0, f(x_1)=1, f(x_2)=0$. Calculando los A_k [$h=\pi/2$] tenemos:

$$A_0=0, A_1=\frac{2}{\pi}[1-0], A_2=\frac{2}{\pi^2}[0-2+0] \quad Q_2(x) = 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) - \frac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$$

$$\text{A lo mismo llegamos con: } Q_2(x) = 0 \frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)} + 1 \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} + 0 \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(-\pi)(-\pi/2)}$$

Utilicemos este polinomio para aproximar $\sin 1$ y $\sin 2$: $Q_2(1) \approx 0.86795, Q_2(2) \approx 0.92534$

Los errores cometidos están acotados por $|E(1)| \leq \frac{1}{24} |1-0||1-\pi/2||1-\pi| \approx 0.05, |E(2)| \leq \frac{1}{24} |2-0||2-\pi/2||2-\pi| \approx 0.04$

Las aproximaciones son peores que las que vimos con el P_7 de Taylor. Pero son mejores en 2 que las obtenidas con el de orden 5 ($P_5(2)=0.9333, \sin 2=0.9093$). Siguen siendo peor en 1, más cercano a 0 ($P_5(1)=0.8417, \sin 1=0.8415$).

4.2. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

Consideramos sucesiones cuyos términos son funciones con un dominio común A :

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \text{ para } x \in A$$

Para cada x fijo de A tenemos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de números reales. Definimos:

$\{f_n\}$ converge puntualmente hacia la función f en A si para cada $x \in A$ se tiene que $\lim_n \{f_n(x)\} = f(x)$

Sería bueno que f conservase las propiedades de las f_n , pero esto, en general, no ocurre:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Todas las f_n son continuas en $[0, \infty)$.

Para cada $x \in [0, \infty)$ existe el límite: $\lim_n f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

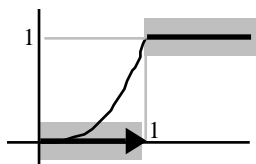
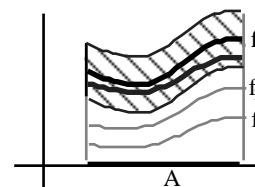
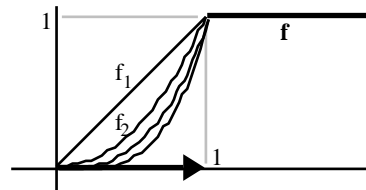
Y, sin embargo, la función límite puntual $f(x)$ es discontinua.

Para que se conserve la continuidad es necesaria una definición más fuerte de convergencia:

$\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f en A si $\epsilon > 0$ existe algún N tal que para todo $x \in A$, si $n > N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

[El N vale x , sólo depende de ϵ ; en cambio, la convergencia puntual quiere decir que: $x \in A$ y $\epsilon > 0$ $N(\epsilon, x)$ tal que si $n > N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$]

Gráficamente, que $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente significa que a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan totalmente dentro de una banda del altura 2ϵ alrededor de la f . Si la convergencia de las f_n es sólo puntual, para cada x el N será distinto y no se podrá dar uno que sea válido para todos los puntos de A .



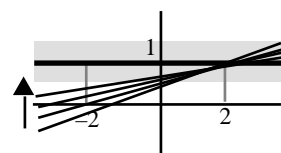
Evidentemente, convergencia uniforme \Rightarrow convergencia puntual. Que es falsa lo prueba la $\{f_n(x)\}$ de arriba: por muy alto que sea el N siempre existen funciones de la sucesión que se salen de la banda de radio ϵ . Formalizando algo más: toda f_n toma el valor $1/2$ que queda fuera de la banda si $\epsilon < 1/2$. Para cada x existe N tal que si $n > N$ el punto $(x, f_n(x))$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir unos N mayores a medida que nos acercamos a 1 . En un intervalo $[0, a]$, con $a < 1$, la convergencia sí sería uniforme, pues el N que valiese para el punto $x=a$ claramente valdría también para el resto de los x .

Otro ejemplo: Estudiemos la convergencia de $g_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$ en i) $A = [-2, 2]$, ii) $A = \mathbf{R}$

Hay límite puntual en todo \mathbf{R} : $\lim_n g_n(x) = 1 \quad x \in \mathbf{R}$. Y en $[-2, 2]$ es también uniforme:

$$\left| \frac{n+x}{n+2} - 1 \right| = \frac{|x-2|}{n+2} \leq \frac{|x|+2}{n+2} \leq \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} < \epsilon \quad \text{si } n > 4/\epsilon \quad x \in [-2, 2].$$

Pero no converge uniformemente en todo \mathbf{R} porque todas las g_n (no acotadas) se escapan de la banda.



Teor Si las f_n son continuas en un intervalo I y $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente en I entonces f es continua en I

Veamos que f es continua en un $x \in I$ cualquiera.

Sea $\epsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, existe algún n tal que $|f(y) - f_n(y)| < \epsilon/3$ $\forall y \in I$.

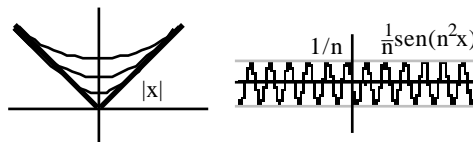
En particular, para todo h tal que $x+h \in I$, $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ y $|f(x+h) - f_n(x+h)| < \epsilon/3$.

Como f_n es continua en x existe un $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \epsilon/3$.

Por tanto, si $|h| < \delta$ entonces $|f(x+h) - f(x)| = |f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

[Este teorema basta para probar que las f_n del primer ejemplo no convergen uniformemente en $[0, \infty)$]

Si las f_n son derivables, que $f_n \rightarrow f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede ser f derivable y no coincidir f' con el límite de las derivadas (situaciones sugeridas por los ejemplos de la derecha); para que se cumplan ambas cosas es necesario exigir además que las f'_n también converjan uniformemente.



4.3. SERIES DE POTENCIAS Y SERIES DE TAYLOR

A una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ se le llama serie de potencias en $(x-a)$.

Para cada x que converja la suma de la serie será un número real. Define, por tanto, una función $f(x)$ cuyo dominio serán dichos x para los que converge. Supondremos a partir de ahora, por sencillez, que $a=0$ (en caso contrario haríamos $x-a=t$ y estaríamos en el caso $a=0$):

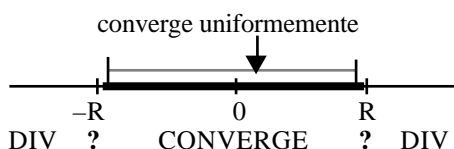
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (\text{viene a ser, pues, un "polinomio infinito"})$$

Una serie de ese tipo siempre converge en $x=0$ (y $f(0)=a_0$), pero no tiene que hacerlo para todo x : ya vimos que la serie x^n converge (y que su suma $f(x)=1/[1-x]$) si y solo si $|x|<1$. En general, converge en un intervalo centrado en el origen (que puede degenerar en $x=0$ o ampliarse a todo \mathbf{R}):

Teor: A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado radio de convergencia de la serie, que, según los casos, tiene las siguientes propiedades:

- i) si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$,
- ii) si R es un número real positivo, la serie converge para $|x|<R$ y diverge para $|x|>R$,
- iii) si $R=\infty$, la serie converge para todo x .

Además, si $0<x_0<R$, la serie converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$.



(En ii), para $x=R$ y $x=-R$ la serie puede converger o divergir)
(El teorema no dice que la serie converja uniformemente en $(-R, R)$, sino que lo hace en $[-x_0, x_0]$ con x_0 tan cercano a R como queramos).

Comencemos demostrando que:

Si $\sum a_n c^n$ converge para un c entonces $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$, si $0 < x_0 < |c|$, y converge puntualmente (y absolutamente) en $(-|c|, |c|)$:

Como $\sum a_n c^n$ converge, su término general $a_n c^n$ tiende a 0 y por tanto está acotada: K tal que $|a_n c^n| \leq K$.

Así pues, si $x \in [-x_0, x_0]$, $|a_n x^n| \leq |a_n c^n| |x_0/c|^n \leq K |x_0/c|^n$.

Como $|x_0/c|^n$ es geométrica convergente ($|x_0/c| < 1$), Weierstrass asegura que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$. Además $x \in (-|c|, |c|)$ existe x_0 con $|x| < x_0 < |c|$, con lo que $|a_n x^n|$ converge puntualmente.

Sea $S = \{x: \sum a_n x^n \text{ converge}\}$. Es no vacío ($0 \in S$). Si existe algún $x \in S$, $|x|$ es cota superior de S (no converge para ningún real mayor por el resultado anterior) y por tanto tiene extremo superior. Veamos que el radio de convergencia $R = \sup S$: si $|x| > R$ la serie diverge (si no, existirían puntos de S mayores que R); si $|x| < R$ existe c con $|x| < c < R$ para el que $\sum a_n c^n$ converge (R es cota superior) y por tanto $\sum a_n x^n$ también converge. Si $0 < x_0 < R$, existe c con $x_0 < c < R$ para el que $\sum a_n c^n$ converge y la serie converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$. Si no existe $x \in S$, converge $x: R = \infty$. Se ve igual que hay convergencia uniforme en todo $[-x_0, x_0]$.

El R lo podremos calcular casi siempre aplicando el criterio del cociente o de la raíz.

Por ejemplo, si en nuestra serie aparecen todos los x^n (no si es de la forma $a_n x^{2n}$ o $a_n x^{2n+1}$) se tiene que:

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ si dichos límites existen o son infinito, pues}$$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad [> 1] \quad |x| < \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad [|x| > \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}] \text{ (y parecido con la raíz).}$$

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0 = R$: la serie sólo converge si $x=0$ (y podemos tirarla a la basura).

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. $R = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ (cociente, desde luego). Converge para todo x (a $f(x)=e^x$ como veremos pronto).

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. $\lim_n \frac{9^{n+1} |x|^{2n+3}}{9^n |x|^{2n+1}} = 9|x|^2 < 1 \quad |x| < \frac{1}{3} = R$; si $x = \pm \frac{1}{3}$ también converge (Leibniz)
[no podíamos aplicar las fórmulas recuadradas y hemos tenido que utilizar directamente el cociente].

Propiedad esencial de las series de potencias es que se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia $|x| < R$ (como si fuesen polinomios):

Teor:

Sea $R > 0$ (finito o infinito) y sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < R$. Entonces para $|x| < R$:
 f es derivable, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

[la demostración utiliza propiedades no vistas de derivación de series uniformemente convergentes (ver Spivak); en el capítulo 5 veremos que también las series de potencias se podrán integrar término a término en $|x| < R$]

Aplicando el teorema sucesivamente a f' , f'' , ... obtenemos que para $|x| < R$:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots, \dots, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = k! a_k + \dots$$

Así, una f definida por una serie de potencias es de clase infinito en $|x| < R$ y $f^{(k)}(0) = k! a_k$

Ejemplos: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots$. Su radio de convergencia es $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots, f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} + \dots, \dots \text{ si } |x| < 1.$$

Como $[1/n^2]$ y $[(-1)^n/n^2]$ convergen, la serie de la f converge en los dos extremos del intervalo de convergencia ($x=-1$ y $x=1$). Sin embargo las series de las derivadas tienen diferente comportamiento en esos puntos: la de f' converge en $[-1,1]$, mientras que la de la f'' lo hace sólo en $(-1,1)$. Las derivadas pueden ser "peores" que la función inicial (pensemos en $x^{8/3}$, por ejemplo). Pero las funciones definidas por series son "muy buenas" en $(-R,R)$ (acabamos de ver que tienen infinitas derivadas ahí). El problema fundamental de estas funciones tan buenas es que para hallar sus valores debemos sumar series (y por eso casi siempre nos tendremos que conformar con valores aproximados).

La derivada de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$ $x \in \mathbf{R}$ [ya dijimos que era e^x]

También pueden sumarse, multiplicarse,... las series de potencias como si fuesen polinomios:

Teor:

Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si $|x| < R_f$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ si $|x| < R_g$. Entonces si $|x| < \min(R_f, R_g)$:
 $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n] x^n$, $f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$

[lo de la suma es consecuencia de las propiedades de series numéricas; lo del producto es mas complicado y no lo vemos; también se pueden realizar la división f/g (si f/g tiene límite en $x=0$) y la "composición" de series]

Ejemplo: Hallemos de varias formas el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{[x+3][x-1]}$. Sabemos que:

$$\frac{1}{x-1} = -[1+x+x^2+x^3+\dots] = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ si } |x| < 1, \quad \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-[-x/3]} = \frac{1}{3} [1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-x]^n}{3^n} \text{ si } |x| < 3$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \frac{1}{x+3} = -\frac{1}{3} [1 + (1 - \frac{1}{3})x + (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9})x^2 + (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27})x^3 + \dots] = -\frac{1}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{7x^2}{27} - \frac{20x^3}{81} + \dots \text{ si } |x| < \min(1, 3)$$

$$\text{Lo más rápido: } \frac{1}{[x+3][x-1]} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right] = -\frac{1}{12} \left[3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-1]^n x^n}{3^n} \right] = -\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left[3 + \frac{[-1]^n}{3^n} \right] x^n$$

Ahora "dividimos": buscando una serie c_n tal que $[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][x^2 + 2x - 3] = 1$.

$$\text{Igualando potencias vamos obteniendo: } x^0: -3c_0 = 1 \quad c_0 = -\frac{1}{3}; \quad x^1: 2c_0 - 3c_1 = 0 \quad c_1 = \frac{2}{3} c_0 = -\frac{2}{9}; \dots$$

[la teoría para la serie más general $\sum a_n (x-a)^n$, como dijimos, es la misma; el intervalo de convergencia $|x-a| < R$ está ahora centrado en a]



Dada una f con infinitas derivadas en 0 se llama serie de Taylor de f en el punto 0 a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

[Estas series de potencias son "polinomios de Taylor de infinitos términos"; su N -sima suma parcial es el $P_N(x)$; de la página anterior se deduce que una serie de potencias es la serie de Taylor de la función que define].

Es previsible que una f pueda coincidir con su serie de Taylor (al menos cerca de 0). Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x) \quad \text{está claro que} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad R_N(x) \underset{N \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

La serie de Taylor de f coincide con f en aquellos x para los que el resto tienda a 0 .

Vimos al tratar los polinomios de Taylor que el resto $R_N(x) \rightarrow 0$ para e^x , $\sin x$ y $\cos x$. Así pues:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbf{R}$$

[observemos que la serie derivada de la exponencial es ella misma, que derivando la serie del seno obtenemos la del coseno y que derivando esta última obtenemos la del seno cambiada de signo]

Operando con la serie de e^x y la de $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$ obtenemos que:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad x \in \mathbf{R}$$

$$[\text{además } e^{x^2} \sin x = [1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots][x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots] = x + \frac{5x^3}{6} + \frac{41x^5}{120} + \dots; \cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \dots \quad x \geq 0; \dots]$$

Sabemos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1$, con lo que: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ y $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|x| < 1$.

$$\text{Por tanto:} \quad \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

ya que las derivadas de estas series son las de arriba y en $x=0$ valen 0 las funciones y las series

[Como se ve, la serie del \log converge también en $x=1$ y la del \arctan en $x=\pm 1$ (ambas tienen $R=1$) lo que no hacían las series derivadas; se puede ver que lo hacen (aunque lentamente) hacia $\log 2$ y $\pm \arctan 1$, respectivamente:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots; \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Parece normal que la serie del \log o la de $1/(1+x)$ sólo converjan para $|x| < 1$ ya que en $x=-1$ las funciones se van a infinito, pero es sorprendente que lo hagan sólo en ese intervalo las series de $1/(1+x^2)$ o de $\arctan x$ ya que son funciones derivables en todo \mathbf{R} . La explicación se tendrá cuando se miren esas series en el plano complejo].

De cualquier serie de potencias podemos deducir la expresión del polinomio de Taylor, por ejemplo, el del $\arctan x$:

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pues el resto de la serie es de la forma } x^{2n+1} g(x), \text{ con } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Otra serie muy útil es la de $f(x) = (1+x)^r$, $r \in \mathbf{R}$, que generaliza el binomio de Newton (x^r no es desarrollable en 0):

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n, \quad \text{con } \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}, \quad \text{si } |x| < 1 \quad \left[\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots, \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots, \dots \right]$$

Como $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$, $f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = r(r-1)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$, ... la serie de Taylor es esa, y se puede ver que el $R_N \rightarrow 0$ si $0 < x < 1$ con la expresión de Lagrange (y con otras que también lo hace si $-1 < x < 0$).

Aunque una f sea de C en todo \mathbf{R} y su serie de Taylor converja x la función puede no coincidir con la serie:

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad f(0) = 0 \quad \text{Se puede ver que esta } f \text{ cumple } f^{(n)}(0) = 0 \quad n \geq 0; \text{ así su serie de Taylor es } \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0, \text{ convergente } \forall x; \text{ pero, evidentemente, no coincide con } f \text{ salvo en el punto } x=0.$$

Se dice que una f es **analítica** en $|x| < R$ si se puede escribir como una serie de potencias en ese intervalo (deberá, pues, tener al menos infinitas derivadas en él). $\sin x$, $\cos x$, e^x son analíticas en todo \mathbf{R} . $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^r$ lo son en $|x| < 1$. La última f es un ejemplo de función no analítica cerca de 0 a pesar de tener infinitas derivadas en ese punto.

$$[\text{Más en general, la serie de Taylor de una } f \text{ en un punto } a \text{ es } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n].$$

4.4. CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS

(ya sabemos calcular los otros, finitos o infinitos; pero quedan las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $1 \cdot \infty$, ...)

Utilizando desarrollos de Taylor (para x tendiendo hacia a finito):

Introducimos una notación para abreviar (la "o pequeña"): sea $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$ en un entorno de a .

Diremos que $f(x)=o(g(x))$ cuando $x \rightarrow a$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Con esta notación podemos expresar los polinomios de Taylor escribiendo sólo aquello que se va a utilizar para calcular límites (la función es el polinomio mas "algo despreciable"):

Si f es de C^{n+1} en un entorno de a entonces $f(x) = P_{n,a}(x) + o([x-a]^n)$

(pues entonces $|f^{(n+1)}(c)| \leq K$ para $c \in [a,x]$ $|R_{n,a}(x)/(x-a)^n| = \frac{K|x-a|}{(n+1)!} \rightarrow 0$ si $x \rightarrow a$)

Ejemplos: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x)}{x} = 1$ pues $o(x)$ es precisamente algo que dividido por x tiende a 0 cuando x tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]}{x^3} = \frac{1}{6} \quad \text{en este caso no basta un término del polinomio (no se sabe hacia que tiende } o(x)/x^3 \text{)}$$

Las dos indeterminaciones anteriores eran de la forma $\frac{0}{0}$. Muchas de otro tipo se pueden llevar a ella:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+x)/x} = e, \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x)}{x} = 1 \text{ (utilizado en sucesiones).}$$

$$(-) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos 2x}{x} - \frac{2+\arctan x}{\log(1+2x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-2x^2+o(x^2)}{x} - \frac{2+x+o(x)}{2x-2x^2+o(x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2x^2+o(x^2)-2x-x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = -\frac{3}{2}$$

aquí hemos agrupado en las $o(x^2)$ todos los términos que no influyen en el valor del límite, utilizando una serie de propiedades de la "o" de demostración inmediata:

$$x^m = o(x^n) \text{ si } m > n, \quad f(x) = o(x^m) \quad f(x) = o(x^n) \text{ si } m > n, \quad x^m o(x^n) = o(x^{m+n}), \quad o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n})$$

La regla de L'Hôpital:

Supongamos que $f(x), g(x) \rightarrow 0$ (ó $\pm \infty$) y existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$, o si $\lim = \pm \infty$.

Lo probamos sólo en uno de los casos: para $f, g \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$, a^+ ó a^- .

Para $x \rightarrow a$ pequeño, definiendo $f(a)=g(a)=0$, f y g son continuas en $[a,x]$ y derivables en (a,x) , y es $g'(c) \neq 0$ en (a,x) [porque existe el límite de f'/g']. Por el TVM de Cauchy existe $c \in (a,x)$ con $f(x)g'(c)=g(x)f'(c)$. Como $g(x) \neq 0$ [si fuese $g(x)=0$, por Rolle sería $g'(z)=0$ para algún $z \in (a,x)$] se puede escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ y por tanto } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ pues si } x \rightarrow a^+ \text{ entonces } c \rightarrow a^+.$$

Análogamente se demostraría para $x \rightarrow a^-$, de donde se deduciría para $x \rightarrow a$.

Para calcular un límite indeterminado, si conocemos los desarrollos de las funciones que aparecen en la expresión, suele ser preferible acudir a Taylor. Por ejemplo, el límite $\frac{0}{0}$ de arriba se complica por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \log(1+2x) - 2x - \arctan x}{x \log(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x \log(1+2x) + \frac{2\cos 2x}{1+2x} - 2 - \arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{\log(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}} = \frac{0}{0}$$

y hay que volver a aplicar l'Hôpital para deshacer esta segunda indeterminación y llegar al resultado de antes.

No dice L'Hôpital que si f'/g' no tiene límite (finito o infinito), tampoco lo tenga f/g :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x + \cos x} = -; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \sin x} \text{ no tiene límite, pero es claro que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + [\cos x/x]} = \frac{1}{2}$$

L'Hôpital se puede aplicar más veces que Taylor (cuando $x \pm 0$ y cuando no conocemos los polinomios):

$$\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(1 - \cos x) \cos^2 x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = -2$$

(sin operar y simplificar hubiéramos tenido que volver a aplicar L'Hôpital ya que la indeterminación seguía; pero no nos lancemos a derivar sin comprobar que seguimos con $0/0$ ó ∞/∞ , pues podríamos hacer burradas como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \stackrel{!!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

A pesar de que no conocemos el polinomio de Taylor de $\tan x$ podíamos haber buscado otros conocidos escribiendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x - \sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -2$$

Ahora es necesario L'Hôpital en principio (función complicada), aunque el segundo $\frac{0}{0}$ se podría hacer por Taylor:

$$(0. \) \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \log(e^x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(e^x - 1)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x/(e^x - 1)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(x^2 + 2x)e^x}{e^x} = 0$$

Aquí sí que no hay más remedio que aplicar L'Hôpital (ni $e^x \sim 1+x$, ni $\arctan x \sim x$, ni $\log(1+x) \sim x$ para x gordo):

$$(-) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \arctan x}{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1/[1+x^2]}{1/(1+x)} = \frac{-0}{0^+} = \frac{0}{0^+}$$

Otros dos típicos de L'Hôpital (en 0 el $\log x$ no admite desarrollo de Taylor):

$$(0.[-]) \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \log x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0 \quad (0^0) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = 1$$

Unos límites importantes:

$$\text{Si } a > 0, b > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$$

(en otras palabras $(\log x)^b = o(x^a)$, $x^b = o(e^{ax})$ si $x \rightarrow 0^+$, por grande que sea b y pequeño que sea a)

$$\text{En efecto, } \frac{\log x}{x^a} \sim \frac{1/x}{ax^{a-1}} \sim \frac{1}{ax^a} \rightarrow 0 \quad \frac{(\log x)^b}{x^a} = \left[\frac{\log x}{x^{a/b}} \right]^b \rightarrow 0, \quad \frac{x^b}{e^{ax}} \sim \frac{1}{ae^{ax}} \rightarrow 0 \quad \frac{x^b}{e^{ax}} = \left[\frac{x}{e^{ax/b}} \right]^b \rightarrow 0$$

Recordemos el **cambio de variable** $x = \frac{1}{t}$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$

Como aplicación, $(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t}\right)^t = 1$, pues $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^t = 1$ (o directamente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log x/x} = e^0 = 1$).

$$\text{Más complicado: } (0) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(1 - e^{-3/x^2}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-3t^2}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2 + o(t^2)}{t^2} = 3.$$

Más ejemplos variados: hallemos, si existen, varios límites para la función $\frac{\log(1+x)-x}{\sin x - x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-x}{\sin x - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \pm \quad \text{si } x \rightarrow 0^\pm$$

$$[\text{o L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/[1+x] - 1}{\cos x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/[1+x]^2}{-\sin x} = \pm \quad \text{cuando } x \rightarrow 0^\pm]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-x}{\sin x - x} = \left(\frac{-}{-}\right), \text{ la } x \text{ manda} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)/x - 1}{\sin x/x - 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1 \quad (\text{sabemos } \log()/x \rightarrow 0 \text{ o por L'Hopital})$$

[no se podía aplicar Taylor (estamos muy lejos de $x=0$), ni L'Hôpital ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/[1+x]-1}{\cos x - 1}$ no existe)].

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\log(1+x)-x}{\sin x - x} = \frac{-}{-} = - \quad \text{por ser } 1 - \sin 1 > 0, \text{ límite fácil que sabíamos calcular hace tiempo.}$$

$$\text{Hallemos para todo } a \text{ el } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos ax}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a^2/2 - 1]x^2 + [1/2 - a^4/24]x^4 + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} - & \text{si } a < \sqrt{2} \\ 1/3 & \text{si } a = \sqrt{2} \\ & \text{si } a > \sqrt{2} \end{cases}$$

[por L'Hôpital sería mucho más largo y sería mucho más fácil equivocarnos en algún paso]

Con lo que hemos aprendido sobre Taylor y límites indeterminados en este capítulo podemos abordar diferentes problemas de capítulos anteriores para los que antes nos faltaban argumentos. Por ejemplo, ahora ya sabemos calcular muchos más límites de **sucesiones** (y deducir convergencias de **series**), gracias a los teoremas que los relacionan con los de funciones. Recordamos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{toda sucesión } \{a_n\} \text{ con } a_n \rightarrow a \text{ satisface que } \{f(a_n)\} \rightarrow L \text{ (o cambiando a por } \infty \text{)}$$

Ejemplos. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, pues $\{n\}$ y $x^{1/x} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$ (por la misma razón $\sqrt[n+3]{n+3} \rightarrow 1$);

$(1+a_n)^{1/a_n} \rightarrow e$ si $\{a_n\} \rightarrow 0$ pues vimos que $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$ (propiedades adelantadas en sucesiones).

$b_n = n^4 - n^6 \arctan \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$, pues se puede poner como $f(\frac{1}{n^2})$ con $f(x) = \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{x^3/3 + \dots}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$.

$\arctan \frac{1}{n}$ es divergente, pues $\arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (es decir, $\frac{\arctan(1/n)}{1/n} \rightarrow 1$, pues $\frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1$ y $\frac{1}{n} \rightarrow 0$).

$(-1)^n n^2 e^{-\sqrt{n}}$ converge por Leibniz, pues es alternada, $f(n) = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} \rightarrow 0$ [porque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \stackrel{x=t^2}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{e^t} = 0$ (sin el cambio sería largo por L'Hôpital: $\frac{x^2/e^{\sqrt{x}}}{4x^{3/2}/e^{\sqrt{x}}} = \frac{12x/e^{\sqrt{x}}}{24x^{1/2}/e^{\sqrt{x}}} = \frac{24/e^{\sqrt{x}}}{24/e^{\sqrt{x}}} = 0$)] y es decreciente a partir de un n [ya que $f'(x) = \frac{x}{2}(4 - \sqrt{x})e^{-x} < 0$ si $x > 16$].

Otra situación en la que nos han aparecido límites indeterminados es en la definición de **derivada**. Aunque con los teoremas de derivación se podían calcular casi todas, quedaban aún algunas que no sabíamos hacer. Ahora ya podemos con Taylor y L'Hôpital:

Ejemplos. Estudiemos si son derivables en $x=0$ las siguientes funciones:

$n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$, con $n(0) = \frac{\pi}{2}$. Haciendo uso del último teorema de 3.2 ya vimos que $n'(0) = 0$.

Ahora directamente: $n'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(1/h^2) - \pi/2}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(t^2) - \pi/2}{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t/[1+t^4]}{-1/t^2} = 0$

$l(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$, $l(0) = 1$. Como $l(x) = \frac{x+o(x)}{x} \rightarrow 1$, la función l es al menos continua en $x=0$.

Aunque no va a ser lo más rápido, acudamos a la definición para ver si existe $l'(0)$:

$$l'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)/h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2/2 + o(h^2)}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

¿Existirá también $l''(0)$? Siguiendo con la definición, necesitamos antes la expresión de $l'(x)$ para $x \neq 0$:

$$l'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{(1+x)x^2} \quad l''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + (1+h)h^2 - 2(1+h)\log(1+h)}{2(1+h)h^3} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^3/3 + o(h^3)}{2h^3 + 2h^4} = \frac{2}{3}$$

Pero las cosas son mucho más fáciles gracias a los desarrollos de Taylor. Nuestra función es exactamente:

$$l(x) = \frac{x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \text{ para todo } |x| < 1.$$

Al ser una función definida por una serie de potencias (o sea, analítica) tiene infinitas derivadas y sabemos que:

$$l(0) = 1, \quad l'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{l''(0)}{2} = \frac{1}{3}, \quad l'''(0) = \frac{2}{3}, \dots$$

$f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$. Comprobemos, como aseguramos en 4.3, que $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$. Para $x \neq 0$ es:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left[\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right] e^{-1/x^2}, \quad f'''(x) = \left[\frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5} \right] e^{-1/x^2}, \dots$$

$$\text{Entonces: } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} t e^{-t^2} = 0, \quad f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{t \rightarrow 0} 2t^4 e^{-t^2} = 0, \dots$$

[pues e^{t^2} es todavía mucho mayor que e^t ($e^t/e^{t^2} = e^{t-t^2} \rightarrow e^{-1} \neq 0$) y ya sabemos que $t^n e^{-t} \rightarrow 0$]

Para cualquier n , tras hacer $h=1/t$, acabaremos en: $f^{(n)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (\text{polinomio}) e^{-t^2} = 0$.

Otra situación en que serán útiles los temas de este capítulo será en el dibujo de **gráficas**:

$$g(x) = x^2 e^{1/x} e^{-x}$$

0. Asíntotas: si $x \rightarrow 0^-$, $g \rightarrow 0.0.1=0$; si $x \rightarrow -$, $g \rightarrow .1. =$;
 si $x \rightarrow 0^+$, $g \rightarrow 0. .1$ indeterminado, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g = 1$. $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-2} e^t =$;
 si $x \rightarrow$, $g \rightarrow .1.0$ indeterminado, $\lim_{x \rightarrow} g = 1$. $\lim_{x \rightarrow} x^2 e^{-x} = 0$.

$g'(x) = -[x-1]^2 e^{1/x} e^{-x}$ siempre decreciente ($x=1$ punto de inflexión con tangente horizontal); $g'(x) = 0$ si $x = 0^-$

$$g''(x) = \frac{1}{x^2} [x-1][x^3 - 3x^2 + x - 1] e^{1/x} e^{-x}$$

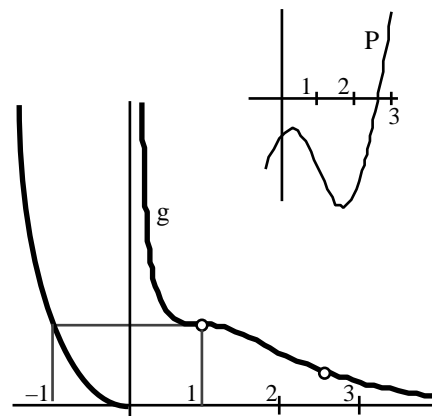
Analizamos el número de raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$:

$+-+ -$ (3 ó 1 positivas), $----$ (sin raíces negativas)

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ si } x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, P(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = -2 + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 0$$

sólo 1 cero real de P [en (2,3)] 2 puntos de inflexión de g

Los únicos valores sencillos: $g(-1)=g(1)=1$, $g'(-1)=-4$.



$$h(x) = x \log\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

Impar. $\lim_{x \rightarrow 0} h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log[1+4/x^2]}{1/x} = (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{x^2+4} = 0$. $\lim_{x \rightarrow} h = (L'H) = \lim_{x \rightarrow} \frac{8x}{x^2+4} = 0$
 [o bien ($x = \frac{1}{t}$) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log[1+4t^2]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} [4t + \frac{o(t^2)}{t}] = 0$; o (informal) $h \sim x \log 2 \sim x \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x}$, pues $\log(1+\cdot) \sim \cdot$ "chico".]

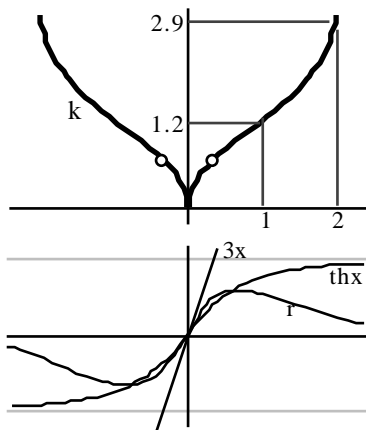
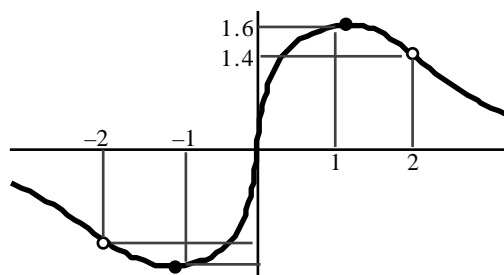
$$h'(x) = \log\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - \frac{8}{x^2+4}; h''(x) = \frac{8[x^2-4]}{x[x^2+4]^2}$$

h es en $(-2,0)$ $(2,)$ y es en $(-,2)$ $(0,2)$.

$$h'(x) \sim 0^+, h'(1) = \log 5 - \frac{8}{5} \approx 0.01, h'(2) = \log 5 - 1 \approx -0.3$$

existe un único máximo (en un x algo mayor que 1)

$$h(1) = \log 5 \approx 1.61, h(2) = 2 \log 2 \approx 1.4$$



$$k(x) = \frac{\text{sh}x}{x^{1/3}}$$

Par. $k(x) = x^{2/3} + o(x^{2/3})$ continua en $x=0$ si $k(0)=0$
 (y no derivable; o directamente $k'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{sh}h}{h^{4/3}} =$).

$$k(\pm 1) = \frac{1}{2} [e - e^{-1}] \approx 1.2, k(\pm 2) = 2^{-4/3} [e^2 - e^{-2}] \approx 2.9$$

$$k'(x) = x^{-1/3} \text{ch}x - \frac{1}{3} x^{-4/3} \text{sh}x = 0 \quad \text{th}x = 3x \text{ (nunca)}$$

$$k''(x) = [x^{-1/3} + \frac{4}{9} x^{-4/3}] \text{sh}x - \frac{2}{3} x^{-4/3} \text{ch}x = 0 \quad \text{th}x = \frac{6x}{9x^2+4} = r(x)$$

Vemos si se cortan las gráficas de estas dos funciones impares [r y th]:

$$r'(0) = 3/2, r(1/3) = 0.4, r(2/3) = 0.5 \text{ (máximo de } r), r = 0 \text{ si } x =$$

$$\text{th}'(0) = 1, \text{th}(1/3) \approx 0.32, \text{th}(2/3) \approx 0.58, \text{th} = 1 \text{ si } x =$$

hay un punto de inflexión para un $x \in (1/3, 1/2)$.

$$p(x) = \cos^2 x e^{\tan x}$$

-periódica. Continua si $x = \frac{\pi}{2} + k$.

$$p'(x) = [1 - \sin 2x] e^{\tan x} = 0 \text{ (k inflexión horizontal).}$$

$$p^{x \rightarrow \pi/2^+} 0.0=0, p^{x \rightarrow \pi/2^+} 1.0=0, p^{x \rightarrow \pi/2^-} 0.$$

$$\text{L'Hôpital: } \frac{e^{\tan x}}{1 + \tan^2 x} / \frac{e^{\tan x}}{2 \tan x} / \frac{e^{\tan x}}{2} x \rightarrow \pi/2^-$$

$$[\text{o bien, } \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{e^{\tan x}}{1 + \tan^2 x} = (t = \tan x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{1 + t^2} =]$$

